جامعة قسنطينة
قسم الفيزياء (LMD)

مقياس(فيزياء1)
السنة الجامعية 2009/2008

السلسلة رقم 01 : مراجعة حول الأشعة

- التمرين 01: نعتبر ثلاثة أشعة $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ معطاة هندسيا

1- بين أن عملية جمع الأشعة تبديلية و تجميعية

2- مثل هندسيا علاقة المساواة : $3\vec{A} + 2(\vec{B} - \vec{A}) = \vec{A} + 2\vec{B}$ 3- شكل الأشعة (**المنزل**) :

$\vec{V} = 2\vec{A} - 3\vec{B} + 1/2\vec{C}$ و $\vec{W} = -1/3\vec{A} + 1/4\vec{B} + \vec{C}$

- التمرين 02: في معلم متعامد و متجانس$(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, نعتبر النقطتين$P(2, -1, 3)$ و $Q(5, 1, -1)$

1- مثل هندسيا الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ و أعط مركباته ثم أحسب المسافة بين P و Q

2- مثل في المعلم الشعاع $\overrightarrow{OA}$ المساير لـ $\overrightarrow{PQ}$, و أحسب شعاع واحدته $\vec{U}$

3- مثل الأشعة $\overrightarrow{OA_1}$ ، $\overrightarrow{OA_2}$ و $\overrightarrow{OA_3}$ حيث A_1 و A_2 و A_3 هي مساقط النقطة A على المستويات (Oxy)، (Oxz) و (Oyz)

4- أوجد إحداثيات النقطة B التي تنتمي إلى المستوي (Oxy) بحيث يكون:

أ- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عموديا على الشعاع $\overrightarrow{OA_2}$

ب- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عموديا على الشعاع $\overrightarrow{OA_3}$

ج- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ موازيا للشعاع $\overrightarrow{OA_1}$

- التمرين 03: في معلم متعامد و متجانس $(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ بين أن من أجل الشعاع الكيفي $\vec{A}$ لدينا دائما:

أ- $\vec{A} = (\vec{A}.\vec{i})\vec{i} + (\vec{A}.\vec{j})\vec{j} + (\vec{A}.\vec{k})\vec{k}$

ب- $\vec{A} = \|\vec{A}\|(\mathrm{Cos}\alpha\,\vec{i} + \mathrm{Cos}\beta\,\vec{j} + \mathrm{Cos}\gamma\,\vec{k})$

حيث α ، β و γ هي الزوايا التي يصنعها $\vec{A}$ على التوالي مع $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (جيوب التمام الموجهة).
ماذا تمثل هذه الجيوب بالنسبة لشعاع الواحدة المرتبط بـ $\vec{A}$

- التمرين 04: لتكن مجموعة الأشعة $\hat{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ، $\hat{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$
و $\hat{C} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

1- أحسب طويلة كل شعاع, و شعاع الواحدة الذي يوافقه

2- أحسب $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ و شعاع واحدته و الزوايا التي يصنعها مع $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

3- أحسب $\hat{U} = 2\hat{A} + \hat{B}$ و $\hat{V} = 3\hat{A} - 5\hat{B}$, و $\hat{W} = \hat{A} - 2\hat{B} + 5\hat{C}$

4- أحسب الجداء السلمي $\hat{U}.\hat{V}$ و $\hat{U}.\hat{W}$ و $\hat{V}.\hat{W}$ ، أحسب الزاويتين $(\hat{U}.\hat{V})$ ، $(\hat{U}.\hat{W})$.

- التمرين 05: لدينا الأشعة: $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ ، $\vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{C} = -\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$

1- أحسب الجداء السلمي $\hat{A}.\hat{B}$ ثم استنتج الزاوية $(\hat{A}.\hat{B})$

2- أحسب الجداء ألشعاعي $\hat{V} = \hat{A}\ Ù\ \hat{B}$, ثم أستنتج بطريقة أخرى الزاوية $(\hat{A}.\hat{B})$

3- أحسب الجداء المضاعف $(\hat{A}\ Ù\ \hat{B})\ Ù\ \hat{C}$,$\hat{A}\ Ù\ (\hat{B}\ Ù\ \hat{C})$, ماذا تستنتج.

4- أحسب الجداء المختلط : $\vec{A}.(\vec{B}\ Ù\ \vec{C})$ و $\vec{C}.(\vec{A}\ Ù\ \vec{B})$ و $\vec{B}.(\vec{C}\ Ù\ \vec{A})$,
ماذا تلاحظ ، هل النتائج المتحصل عليها منتظرة ، ماذا يمثل هذا الجداء.

5- نعرف $\vec{W} = a\vec{i} + b\vec{j} - 3\vec{k}$ ، أوجد a و b لكي يكون $\vec{V}$ و $\vec{W}$ من نفس الاتجاه

- **<u>التمرين 06</u> :** ليكن الشعاع : $\vec{U} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ و النقطتان $A(3,-4,2)$ و $B(x,y,z)$ ،

1- أوجد إ حداثيات النقطة B بحيث يكون :

أ- $\vec{AB} \wedge \vec{U}$ ، ماذا تمثل مجموعة هذه النقاط

ب- $\vec{AB} \;//\; \hat{U}$ ، نفس السؤال السابق

2- أوجد إحداثيات النقطة B حتى يكون : $\hat{U}$ Ù $\vec{AB} // (\hat{i} - \hat{k})$ ، $\hat{U}$ Ù $\vec{AB} \wedge (\hat{k} - \hat{j})$

- **<u>التمرين 07</u> :** لتكن الدالة الشعاعية $\hat{V}(t)$ التابعة للزمن : $\hat{V}(t) = Vx(t)\hat{i} + Vy(t)\hat{j} + Vz(t)\hat{k}$

1- بين في الحالة العامة أن : $d\|\hat{V}\|/dt$ 1 $\|d\hat{V}/dt\|$ متى تتحقق المساواة

2- بين أن المساواة : $\hat{V}.d\hat{V}/dt = \|\hat{V}\|.d\|\hat{V}\|/dt$ صحيحة مهما كانت عبارة $\hat{V}(t)$

3- إذا كانت $\|\hat{V}\| = Cte$ بين أن $\hat{V}(t) \wedge d\hat{V}(t)/dt$

4- إذا كانت عبارة الدالة $\hat{V}(t)$من الشكل : $\vec{V}(t) = (3t^2 + 2)\vec{i} + (t^3 - 5)\vec{j} - (3t^2 - 5t)\vec{k}$

أ- أحسب : $d\hat{V}(t)/dt$ و $d^2\vec{V}(t)/dt^2$

ب- أحسب : $\|d\hat{V}/dt\|$ و $d\|\hat{V}\|/dt$ ، ماذا تلاحظ

ج- حالة خاصة: $t = 5s$ ، تحقق من نتيجة السؤال السابق.

<u>التمرين 08</u> : يعطى الشعاعان $\hat{V} = -a\hat{i} + 2b\hat{j} - g\hat{k}$ و $\hat{W} = (a/2)\hat{i} - b\hat{j} + x\hat{k}$ حيث أن α , β و γ ثوابت. حدد قيمة الوسيط x بدلالة هذه الثوابت حتى يكون : $\hat{V} // \hat{W}$ ، $\hat{V} \wedge \hat{W}$

- **<u>التمرين 09</u> :** نعطي مجموعة الأشعة : $\hat{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ و $\hat{B} = -\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ و $\hat{C} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

1- أحسب $\hat{A}.\hat{B}$, $\hat{A}.\hat{C}$ و $\hat{B}.\hat{C}$

2- أوجد الزاوية $(\vec{A},\vec{B})$ $(\vec{B},\vec{C})$,

3- أحسب كذلك $\hat{A}$ Ù $\hat{B}$ ، $\hat{A}$ Ù $\hat{C}$ و $\hat{B}$ Ù $\hat{C}$

4- أحسب مساحة متوازيي الأضلاع المشكلين بالأشعة $(\vec{A},\vec{B})$ و $(\vec{B},\vec{C})$

5- أحسب الجداء المضاعف $(\hat{A}$ Ù $\hat{B})$ Ù $\hat{C}$, $\hat{A}$ Ù $(\hat{B}$ Ù $\hat{C})$, ماذا تستنتج.

6- أحسب الجداء المختلط : $(\vec{A}$ Ù $\vec{B}).\vec{C}$ ، $(\vec{B}$ Ù $\vec{C}).\vec{A}$ و $(\vec{C}$ Ù $\vec{A}).\vec{B}$, ماذا تلاحظ.

- **<u>التمرين10</u>:** لتكن الأشعة: $\vec{V}_1 = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ و $\vec{V}_2 = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ و $\vec{V}_3 = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

1- أوجد إن أمكن قيمة الوسيط α حتى يكون :

- $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \;//\; \vec{k}$ ، $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \;//\; \vec{j}$

- $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \;//\; \vec{i}$ ، $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0}$

2- أحسب الجداءات : $\vec{V}_1.(\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$ ، $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2).\vec{V}_3$

3- أحسب الجداءات : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ و $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$ و $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$ ثم $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$ و $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$

4- أحسب الجداء المختلط : $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)\cdot\vec{V}_3$ و $(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2)\cdot\vec{V}_1$ ، ماذا تلاحظ .

5- أحسب الجداء المضاعف : $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$ و $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2)$ ، ماذا تلاحظ .

السلسلة رقم 01 : مراجعة حول الأشعة

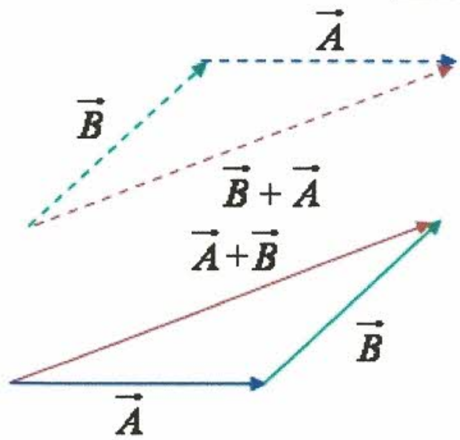
- التمرين 01: نعتبر ثلاثة أشعة $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ معطاة هندسيا

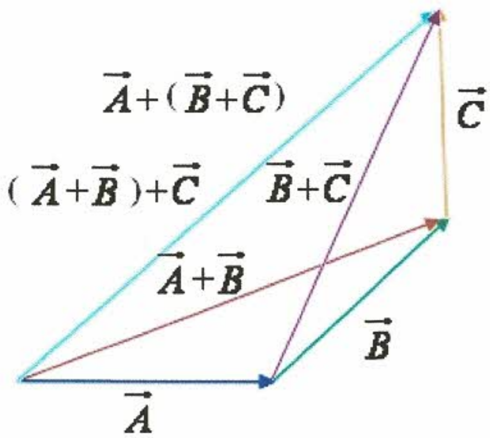
1- بين أن عملية جمع الأشعة تبديلية و تجميعية

2- مثل هندسيا علاقة المساواة : $3\vec{A} + 2(\vec{B} - \vec{A}) = \vec{A} + 2\vec{B}$

3- شكل الأشعة : $\vec{V} = 2\vec{A} - 3\vec{B} + 1/2\vec{C}$ و $\vec{W} = -1/3\vec{A} + 1/4\vec{B} + \vec{C}$

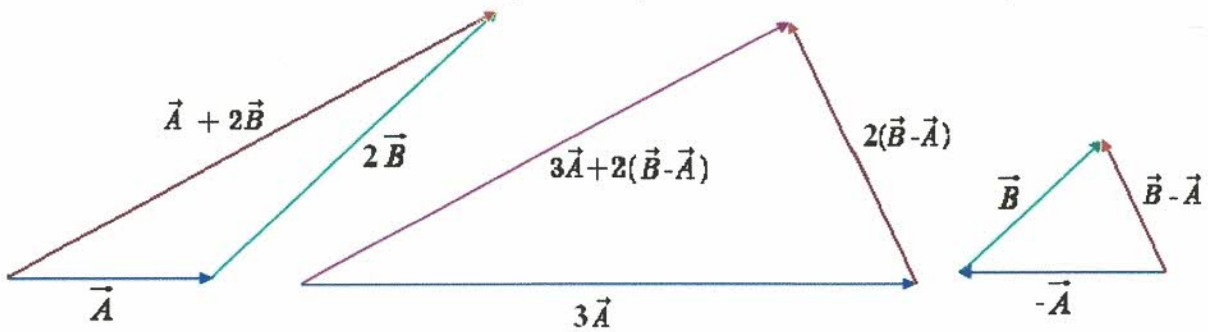
الحل :





1- عملية جمع الأشعة تبديلية عملية جمع الأشعة تجميعية

2- التمثيل الهندسي للعلاقة : $3\vec{A} + 2(\vec{B} - \vec{A}) = \vec{A} + 2\vec{B}$



- التمرين 02: في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$، نعتبر النقطتين $P(2, -1, 3)$ و $Q(5, 1, -1)$

1- مثل هندسيا الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ و أعط مركباته ثم أحسب المسافة بين P و Q

2- مثل في المعلم الشعاع $\overrightarrow{OA}$ المساير لـ $\overrightarrow{PQ}$، و أحسب شعاع واحدته $\vec{U}$

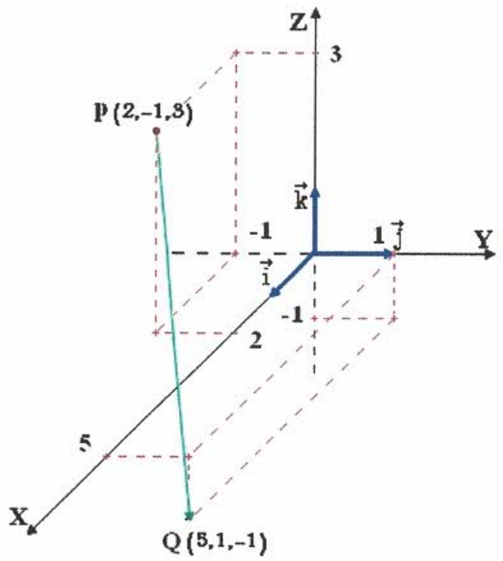
3- مثل الأشعة $\overrightarrow{OA_1}$ ، $\overrightarrow{OA_2}$ و $\overrightarrow{OA_3}$ حيث A_1 و A_2 و A_3 هي مساقط النقطة A على المستويات (Oxy)، (Oxz) و (Oyz)

4- أوجد إحداثيات النقطة B التي تنتمي إلى المستوي (Oxy) بحيث يكون:

أ- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عموديا على الشعاع $\overrightarrow{OA_2}$

ب- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عموديا على الشعاع $\overrightarrow{OA_3}$

ج- الشعاع $\overrightarrow{OB}$ موازيا للشعاع $\overrightarrow{OA_1}$



الحل:

1- مركبات الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ هي :

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{Bmatrix} X_Q-X_P \\ Y_Q-Y_P \\ Z_Q-Z_P \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 5-2 \\ 1+1 \\ -1-3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{Bmatrix}$$

و المسافة بين P و Q هي طويلة $\overrightarrow{PQ}$:

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{3^2+2^2+4^2} = \sqrt{29}$$

2- الشعاع $\overrightarrow{OA}$ هو نفسه $\overrightarrow{PQ}$ مطبق في النقطة O نحصل على شعاع الواحدة $\vec{U}$:

$$\vec{U}=\frac{\overrightarrow{OA}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|}=\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} \\ \frac{-4}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$$

3- تكون النقاط : $A_1(3,2,0)$ ¤ $A_2(3,0,-4)$! $A_3(0,2,-4)$ ، وتكون الأشعة :

- $\overrightarrow{OA_1}$ يقع في المستوي (Oxy)
- $\overrightarrow{OA_2}$ يقع في المستوي (Oxz)
- $\overrightarrow{OA_3}$ يقع في المستوي (Oyz)

4- إحداثيات النقطة $B(x,y)$:

ا- $\overrightarrow{OB}$ عمودي على $\overrightarrow{OA_2}$: $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA_2}=(x\vec{i}+y\vec{j}).(3\vec{i}-4\vec{k})=3x=0$

أي $x=0$ و هي تمثل مجموع النقاط التي تنتمي للمحور (Oy)

ب- $\overrightarrow{OB}$ عمودي على $\overrightarrow{OA_3}$: $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA_3}=(x\vec{i}+y\vec{j}).(2\vec{j}-4\vec{k})=2y=0$

أي $y=0$ و هي تمثل مجموع النقاط التي تنتمي للمحور (Ox)

ج- $\overrightarrow{OB}$ موازي $\overrightarrow{OA_1}$: $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OA_1}=\vec{0} \Rightarrow \frac{x}{3}=\frac{y}{2} \Rightarrow 2x-3y=0$

أي تمثل معادلة مستقيم في المستوي (Oxy) ميله 2/3

- التمرين 03: في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ بين أن من أجل الشعاع الكيفي $\vec{A}$ لدينا دائما:

أ- $\vec{A}=(\vec{A}.\vec{i})\vec{i}+(\vec{A}.\vec{j})\vec{j}+(\vec{A}.\vec{k})\vec{k}$

ب- $\vec{A}=\left\|\vec{A}\right\|(\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k})$

حيث α ، β و γ هي الزوايا التي يصنعها $\vec{A}$ على التوالي مع $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (جيوب التمام الموجهة).
ماذا تمثل هذه الجيوب بالنسبة لشعاع الواحدة المرتبط بـ $\vec{A}$

الحل :

ا- نكتب الشعاع $\vec{A}$ على الشكل : $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ ثم نقوم بالجداء السلمي

$\vec{A}.\vec{i} = A_x$ و $\vec{A}.\vec{j} = A_y$ و كذلك $\vec{A}.\vec{k} = A_z$ ، فنحصل على النتيجة

ب- نلاحظ أن : $\|\vec{A}\|\ Cos\alpha$ ، $\|\vec{A}\|\ Cos\beta$ و $\|\vec{A}\|\ Cos\gamma$ تمثل مساقط الشعاع على المحاور الثلاثة ،
أي هي أصلا مركبات الشعاع في هذه القاعدة، فنكتب :

$$\vec{A} = \|\vec{A}\|Cos\alpha\,\vec{i} + \|\vec{A}\|Cos\beta\,\vec{j} + \|\vec{A}\|Cos\gamma\,\vec{k} = \|\vec{A}\|(Cos\alpha\,\vec{i} + Cos\beta\,\vec{j} + Cos\gamma\,\vec{k})$$

α ، β و γ هي الزوايا الموجهة لشعاع الواحدة حسب $\vec{A}$ و جيوب التمام هي مركبات هذا الشعاع

- التمرين 04: لتكن مجموعة الأشعة $\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$
و $\vec{C} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

1- أحسب طويلة كل شعاع, و شعاع الواحدة الذي يوافقه

2- أحسب $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ و شعاع واحدته و الزوايا التي يصنعها مع $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

3- أحسب $\vec{U} = 2\vec{A} + \vec{B}$ و $\vec{V} = 3\vec{A} - 5\vec{B}$, و $\vec{W} = \vec{A} - 2\vec{B} + 5\vec{C}$

4- أحسب الجداء السلمي $\vec{U}.\vec{V}$ و $\vec{U}.\vec{W}$ و $\vec{V}.\vec{W}$ ، أحسب الزاويتين $(\vec{U}.\vec{V})$ ، $(\vec{U}.\vec{W})$.

الحل :

-1 $\|\vec{A}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ ، $\vec{U}_A = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$

$\|\vec{B}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$ ، $\vec{U}_B = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} - \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}$

$\|\vec{C}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$ ، $\vec{U}_C = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|} = \frac{3}{\sqrt{29}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{29}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{29}}\vec{k}$

-2 $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 6\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ ، $\vec{U} = \frac{6}{\sqrt{41}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{41}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{41}}\vec{k}$

$Cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{41}}$ ، $Cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{41}}$ و $Cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{41}}$

-3 $\vec{U} = 2\vec{A} + \vec{B} = 5\vec{i} - \vec{k}$ ، $\vec{V} = 3\vec{A} - 5\vec{B} = \vec{i} - 13\vec{j} + 18\vec{k}$

$\vec{W} = \vec{A} - 2\vec{B} + 5\vec{C} = 15\vec{i} - 15\vec{j} + 27\vec{k}$

-4 $\vec{U}.\vec{V} = -13$ ، $\vec{U}.\vec{W} = 48$ و $\vec{V}.\vec{W} = 696$

$$Cos(\vec{U},\vec{V}) = \frac{\vec{U}.\vec{V}}{\|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|} = \frac{-13}{\sqrt{26}.\sqrt{494}} = -0.3742663 \Rightarrow (\vec{U},\vec{V}) = 68°$$

$$Cos(\vec{U},\vec{W}) = \frac{\vec{U}.\vec{W}}{\|\vec{U}\|.\|\vec{W}\|} = \frac{48}{\sqrt{26}.\sqrt{1179}} = -0.274156 \Rightarrow (\vec{U},\vec{W}) = 105.91°$$

- التمرين 05: لدينا الأشعة: $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ ، $\vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{C} = -\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$

1- أحسب الجداء السلمي $\vec{A}\ .\ \vec{B}$ ثم استنتج الزاوية $(\vec{A}\ .\ \vec{B})$

2- أحسب الجداء ألشعاعي $\vec{V}=\vec{A}\wedge\vec{B}$, ثم أستنتج بطريقة أخرى الزاوية $(\vec{A}\ .\ \vec{B})$

3- أحسب الجداء المضاعف $(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}$ ،$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$, ماذا تستنتج.

4- أحسب الجداء المختلط : $\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})$ و $\vec{C}.(\vec{A}\wedge\vec{B})$ و $\vec{B}.(\vec{C}\wedge\vec{A})$,
ماذا تلاحظ ، هل النتائج المتحصل عليها منتظرة ، ماذا يمثل هذا الجداء.

5- نعرف $\vec{W} = a\vec{i} + b\vec{j} - 3\vec{k}$ ، أوجد a و b لكي يكون $\vec{V}$ و $\vec{W}$ من نفس الاتجاه

الحل :

1- $\vec{A}.\vec{B}=-3$ ، $$Cos(\vec{A}\ ,\ \vec{B}) = \frac{\vec{A}\ .\ \vec{B}}{\|\vec{A}\|\ .\ \|\vec{B}\|} = \frac{-3}{\sqrt{84}} \Rightarrow (\vec{A}\ ,\ \vec{B}) = 109.11°$$

2- $$\vec{V}=\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-5\\-5\end{pmatrix}$$ ، $$\left|Sin(\vec{A}\ ,\ \vec{B})\right| = \frac{\|\vec{A}\wedge\vec{B}\|}{\|\vec{A}\|\ .\ \|\vec{B}\|} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{84}}$$

$$\Rightarrow (\vec{A}\ ,\ \vec{B}) = \begin{cases} 70.8934° \\ \text{أو} \\ 180-70.8934=109.1066° \end{cases}$$

3- $$\vec{V}=\vec{B}\wedge\vec{C}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & -4\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}7\\3\\-1\end{pmatrix}$$ ، $$(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & -5 & -5\\ -1 & 1 & -4\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}25\\-15\\-10\end{pmatrix}$$

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -3\\ 7 & 3 & -1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-19\\-1\end{pmatrix}$$

نلاحظ أن الجداء ألشعاعي غير تجميعي

4- $$\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})=(2.7)+(1.3)+(-3.-1)=20$$
$$\vec{C}.(\vec{A}\wedge\vec{B})=(-5.-1)+(-5.1)+(-5.-4)=20$$

سوف نجد نفس الشيء من أجل العلاقة الثالثة، أي أن الجداء المختلط دوري لأنه يمثل حجم متوازي السطوح المشكل من الأشعة الثلاثة.

5- $\vec{V}$ و $\vec{W}$ من نفس الاتجاه، أي هما متوازيان، يعني $\vec{V}\wedge\vec{W}=\vec{0}$:

$$\vec{V}\wedge\vec{W}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & -5 & -5\\ a & b & -3\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}15+5b\\ -5a-15\\ -5b+5a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}b=-3\\ a=-3\\ 0\end{cases}$$

- التمرين 06 : ليكن الشعاع : $\vec{U}=4\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$ و النقطتان $A(3,-4,2)$ و $B(x,y,z)$ ،

1- أوجد إ حداثيات النقطة B بحيث يكون :

أ- $\overrightarrow{AB}\perp\vec{U}$ ، ماذا تمثل مجموعة هذه النقاط

ب- $\overrightarrow{AB}\ //\ \vec{U}$ ، نفس السؤال السابق

2- أوجد إحداثيات النقطة B حتى يكون : $(\overrightarrow{AB}\wedge\vec{U})//(\vec{i}-\vec{k})$ ، $(\overrightarrow{AB}\wedge\vec{U})\perp(\vec{k}-\vec{j})$

الحل:

أ- $\overrightarrow{AB}\perp\vec{U}$: $\overrightarrow{AB}.\vec{U}=0$ ، $\overrightarrow{AB}=(X-3)\vec{i}+(Y+4)\vec{j}+(Z-2)\vec{k}$ ،

$$\overrightarrow{AB}.\vec{U}=(X-3).4+(Y+4).3-(Z-2).5=0\Rightarrow 4X+3Y-5Z+10=0$$

و العلاقة تمثل معادلة مستوي

ب- $\overrightarrow{AB}\ //\ \vec{U}$: $\Leftarrow$ $\overrightarrow{AB}\wedge\vec{U}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\vec{U}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X-3 & Y+4 & Z-2\\ 4 & 3 & -5\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-5(Y+4)-3(Z-2)\\ 4(Z-2)+5(X-3)\\ 3(X-3)-4(Y+4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-5Y-3Z-14=0\\ 4Z+5X-23=0\\ 3X-4Y-25=0\end{pmatrix}$$

حصلنا على ثلاثة معادلات، اثنتان منها فقط مستقلة وتمثلان معادلتي مستويين، أما الثالثة فهي مجموع : (المعادلة1).4/5 + (المعادلة2).3/5 ، و مجموع النقاط هو المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين.

2- الحالة الأولى : $(\overrightarrow{AB}\wedge\vec{U})//(\vec{i}-\vec{k})$

$$(\overrightarrow{AB}\wedge\vec{U})\wedge(\vec{i}-\vec{k})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5Y-3Z-14 & 4Z+5X-23 & 3X-4Y-25\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}5X-4Z+23\\ 3X+4Y-2Z-39\\ 5X-4Z+23\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}5X-4Z+23\\ 3X+4Y-2Z-39\\ 5X-4Z+23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow 5X-4Z+23=0\ ,\ \ 3X+4Y-2Z-39=0$$

نحصل على معادلتي مستويين ، تقاطعهما هو المستقيم الذي يمثل مجموع النقاط B

الحالة الثانية : $\vec{U}\wedge\overrightarrow{AB}\perp(\vec{k}-\vec{j})\Rightarrow(\vec{U}\wedge\overrightarrow{AB}).(\vec{k}-\vec{j})=0$

$$\vec{U}\wedge\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 3 & -5\\ X-3 & Y+4 & Z-2\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}3(Z-2)+5(Y+4)\\ -5(X-3)-4(Z-2)\\ 4(Y+4)-3(X-3)\end{pmatrix}$$

$$(\vec{U}\wedge\overrightarrow{AB}).(\vec{k}-\vec{j})=\begin{pmatrix}3(Z-2)+5(Y+4)\\ -5(X-3)-4(Z-2)\\ 4(Y+4)-3(X-3)\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\ 5(X-3)+4(Z-2)+4(Y+4)-3(X-3)=0\ \Rightarrow\ 2X+4Y+4Z+2=0$$

و هي تمثل المستوي الذي تنتمي له مجموع النقاط B

- التمرين 07 : لتكن الدالة الشعاعية $\vec{V}(t)$ التابعة للزمن : $\vec{V}(t)=Vx(t)\vec{i}+Vy(t)\vec{j}+Vz(t)\vec{k}$

1- بين في الحالة العامة أن : $\|d\vec{V}/dt\| \neq d\|\vec{V}\|/dt$ متى تتحقق المساواة

2- بين أن المساواة : $\vec{V}.d\vec{V}/dt=\|\vec{V}\|.d\|\vec{V}\|/dt$ صحيحة مهما كانت عبارة $\vec{V}(t)$

3- إذا كانت $\|\vec{V}\|=Cte$ بين أن $\vec{V}(t)\perp d\vec{V}(t)/dt$

4- إذا كانت عبارة الدالة $\vec{V}(t)$ من الشكل : $\vec{V}(t)=(3t^2+2)\vec{i}+(t^3-5)\vec{j}-(3t^2-5t)\vec{k}$

أ- أحسب : $d\vec{V}(t)/dt$ و $d^2\vec{V}(t)/dt^2$

ب- أحسب : $\|d\vec{V}/dt\|$ و $d\|\vec{V}\|/dt$ ، ماذا تلاحظ

ج- حالة خاصة: $t=5s$ ، تحقق من نتيجة السؤال السابق.

الحل :

-1 $\vec{V}(t)=Vx(t)\vec{i}+Vy(t)\vec{j}+Vz(t)\vec{k}\ \Rightarrow\ \dfrac{d\vec{V}(t)}{dt}=\dfrac{dV_x}{dt}\vec{i}+\dfrac{dV_y}{dt}\vec{j}+\dfrac{dV_z}{dt}\vec{k}\ \Rightarrow$

$$\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|=\sqrt{\left(\frac{dV_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dV_y}{dt}\right)^2+\left(\frac{dV_z}{dt}\right)^2}\quad و\quad \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}=\frac{V_x\frac{dV_x}{dt}+V_y\frac{dV_y}{dt}+V_z\frac{dV_z}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dV_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dV_y}{dt}\right)^2+\left(\frac{dV_z}{dt}\right)^2}}$$

يمكن إعادة كتابة العلاقة الأخيرة من الشكل:

$$\Rightarrow\ \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}=\frac{\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}}{\|\vec{V}\|}=\frac{\|\vec{V}\|.\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|.Cos\left(\vec{V},\frac{d\vec{V}}{dt}\right)}{\|\vec{V}\|}\ \Rightarrow\ \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}=\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|.Cos\left(\vec{V},\frac{d\vec{V}}{dt}\right)$$

نلاحظ إذن : $\dfrac{d\|\vec{V}\|}{dt}\neq\left\|\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right\|$ و تحدث المساواة إذا كانت الزاوية $\left(\vec{V},\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right)=0$ و هي حالة خاصة.

2- لتكن عبارة الجداء السلمي $\vec{V}.\vec{V}=\|\vec{V}\|.\|\vec{V}\|.Cos(\vec{V}.\vec{V})=\|\vec{V}\|.\|\vec{V}\|$ نشتقها فنجد :

$$\frac{d(\vec{V}.\vec{V})}{dt}=\frac{d(\|\vec{V}\|.\|\vec{V}\|)}{dt}=2\ \vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}=2\,\|\vec{V}\|.\frac{d\|\vec{V}\|}{dt}\ \Rightarrow\ \vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}=\|\vec{V}\|.\frac{d\|\vec{V}\|}{dt}$$

3- في حالة $\|\vec{V}\|=Cte \Leftarrow \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}=0$

و حسب العلاقة المبرهنة في (2) نجد : $\vec{V}\perp\frac{d\vec{V}}{dt} \Leftarrow \vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}=0 \Leftarrow$

4- لدينا : $\vec{V}(t)=(3t^2+2)\vec{i}+(t^3-5)\vec{j}-(3t^2-5t)\vec{k}$

أ- $\frac{d\vec{V}}{dt}=(6t)\vec{i}+(3t^2)\vec{j}-(6t-5)\vec{k}$ و $\frac{d^2\vec{V}}{dt^2}=6\vec{i}+(6t)\vec{j}-6\vec{k}$

ب- $\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|=\sqrt{(6t)^2+(3t^2)^2+(6t-5)^2}$ و

$$\frac{d\|\vec{V}\|}{dt}=\frac{d\left(\sqrt{(3t^2+2)^2+(t^3-5)^2+(3t^2-5t)^2}\right)}{dt}$$

$$=\frac{3.t^5+36.t^3-60.t^2+37.t}{\sqrt{(3.t^2+2)^2+(t^3-5)^2+(3.t^2-5\,t)^2}}$$

ج- في حالة $t=5s$ نجد أن: $\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|=\sqrt{(6.5)^2+(3.25)^2+(6.5-5)^2}=\sqrt{7150}=84.56$

و

$$\frac{d\|\vec{V}\|}{dt}=\frac{3.(5)^5+36.(5)^3-60.(5)^2+37.(5)}{\sqrt{(3.(5)^2+2)^2+((5)^3-5)^2+(3.(5)^2-5\,(5))^2}}=1.1339496$$

نلاحظ الفرق بين القيمتين .

التمرين 08 : يعطى الشعاعان $\vec{V}=-\alpha\vec{i}+2\beta\vec{j}-\gamma\vec{k}$ و $\vec{W}=(\alpha/2)\vec{i}-\beta\vec{j}+x\,\vec{k}$

حيث أن α , β و γ ثوابت. حدد قيمة الوسيط x بدلالة هذه الثوابت حتى يكون : $\vec{W}\,//\,\vec{V}$ ، $\vec{V}\perp\vec{W}$

الحل :

- الحالة الأولى : $\vec{V}\,//\,\vec{W} \Rightarrow \vec{V}\wedge\vec{W}=\vec{0} \Leftarrow$

$$X=\frac{\gamma}{2}\Leftarrow 2\beta X-\beta\gamma=0\Leftarrow\vec{V}\wedge\vec{W}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-\alpha&2\beta&-\gamma\\\alpha/2&-\beta&X\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}2\beta X-\beta\gamma\\-\alpha\gamma/2+\alpha X\\\alpha\beta-\alpha\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

- الحالة الثانية :

$$\vec{V} \perp \vec{W} \Leftarrow \vec{V}.\vec{W} = 0 \Leftarrow (-\alpha\vec{i} + 2\beta\vec{j} - \gamma\vec{k}).(\frac{\alpha}{2}\vec{i} - \beta\vec{j} + x\,\vec{k}) = 0$$

$$\Leftarrow -\frac{\alpha^2}{2} - 2\beta^2 - \gamma X = 0 \Leftarrow X = -\frac{\alpha^2 + 4\beta^2}{2\gamma}$$

تمارين إضافية غير محلولة

- التمرين 09 : نعطي مجموعة الأشعة : $\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{B} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$
و $\vec{C} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

1- أحسب $\vec{A}.\vec{B}$, $\vec{A}.\vec{C}$ و $\vec{B}.\vec{C}$

2- أوجد الزاوية $(\vec{A},\vec{B})$ $(\vec{B},\vec{C})$,

3- أحسب كذلك $\vec{A} \wedge \vec{B}$ ، $\vec{A} \wedge \vec{C}$ و $\vec{B} \wedge \vec{C}$

4- أحسب مساحة متوازيي الأضلاع المشكلين بالأشعة $(\vec{A},\vec{B})$ و $(\vec{B},\vec{C})$

5- أحسب الجداء المضاعف $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$ ،$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$, ماذا تستنتج.

6- أحسب الجداء المختلط : $(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C}$ ، $(\vec{B} \wedge \vec{C}).\vec{A}$ و $(\vec{C} \wedge \vec{A}).\vec{B}$, ماذا تلاحظ.

- التمرين10: لتكن الأشعة: $\vec{V}_1 = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ و $\vec{V}_2 = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$
و $\vec{V}_3 = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

1- أوجد إن أمكن قيمة الوسيط α حتى يكون :

- $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \,//\, \vec{k}$ ، $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \,//\, \vec{j}$
- $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \,//\, \vec{i}$ ، $\alpha\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0}$

2- أحسب الجداءات : $\vec{V}_1.(\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$ ، $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2).\vec{V}_3$

3- أحسب الجداءات : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ و $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$ و $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$ ثم $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$ و $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$

4- أحسب الجداء المختلط : $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$ و $(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_1$ ، ماذا تلاحظ .

5- أحسب الجداء المضاعف : $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$ و $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2)$ ، ماذا تلاحظ .